Техническая механика

А.И. Быков
Научный руководитель – доцент, канд. техн. наук Н.А. Лазуткина
Муромский институт Владимирского государственного университета
602264 г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, д. 23
e-mail:kaftexmex@yandex.ru

Исследование равновесия системы сочлененных тел

Стоит задача определить опорные реакции секций гидравлической механизированной крепи и реакции в промежуточных шарнирах (рис.1). Исходные данные: АВ=2,5м; ВС=3,0м; СД=2,2м; q_1=3 кн/м; q_2=2,5 кн/м; q_3=3,4 кн/м; q_4=2,0 кн/м

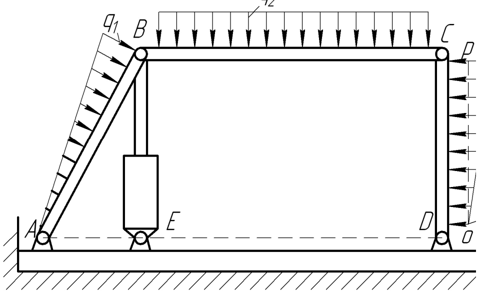

Рис.1. Конструктивная схема секции гидравлической механизированной крепи.

Заменим действие распределительных нагрузок сосредоточенными силами. Эпюра распределительной нагрузки, действующей на звено AB, представляет собой прямоугольный треугольник. Величина эквивалентной сосредоточенной силы равна $Q_1 = \frac{1}{2}qAB$. Точка ее приложения определится $AF = \frac{2}{3}AB$. Эпюра распределенной нагрузки, действующей на звено ВС, представляет собой прямоугольник.

Величина эквивалентной сосредоточенной силы равна $Q_2 = q_2BC$. Точка ее приложения определится $BK = \frac{1}{2}BC$. Эпюра распределенной нагрузки, действующей на звено CD, представляет собой трапецию. Для удобства замены ее действия эквивалентной силой разобьем эпюру на два участка – прямоугольник POde и прямоугольный треугольник OPf. Величина силы, эквивалентной прямоугольной эпюры, равна $Q_3 = q_4CD$. Точка ее приложения определится $CZ = \frac{1}{2}CD$. Величина силы, эквивалентной треугольной эпюры, равна $Q_4 = \frac{1}{2}(q_3 - q_4)CD$. Точка ее приложения определится $CG = \frac{1}{3}CD$.

Освободим систему от внешних связей и заменим их действия реакциями. Внешней связью для системы является гладкая горизонтальная поверхность. Ее реакцию представим $\overline{N}$, перпендикулярной поверхности и приложенной в точке M. Другой внешней связью является вертикальная гладкая поверхность. Заменим ее действие горизонтальной реакцией $\overline{R}$ в точке A. Составляем расчетную схему (рис.1) и выбираем систему координат XAY.

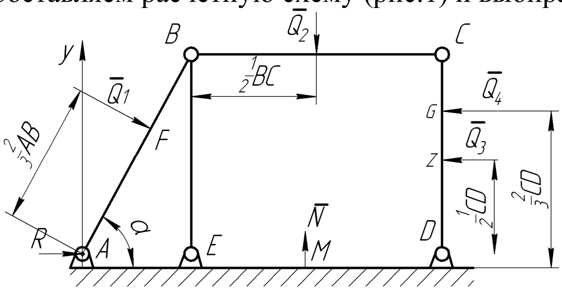

Рис.2. Расчетная схема секции крепи.

Получена плоская произвольная система сил. Для определения опорной реакции $\overline{N}$ в точке ее приложения составим условие ее равновесия:

$$\sum m_A(\overline{F}_K) = 0; \ \sum F_{KX} = 0; \ \sum F_{KY} = 0.$$

Составим сумму моментов всех сил относительно точки A:

$$\sum m_A(\overline{F}_K) = -Q_1 \cdot \frac{2}{3}AB - Q_2(AB\cos\alpha + \frac{1}{2}BC) + +Q_4\frac{2}{3}CD + Q_3CD\frac{1}{2} + N \cdot AM = 0$$

Составляем сумму проекций всех сил, действующих на систему, на координатные оси:

$$\sum F_{KX} = 0; \ R + Q_1\sin\alpha - Q_4 - Q_3 = 0; \ \sum F_{KY} = 0; \ Q_1\cos\alpha - Q_2 + N = 0.$$

Из уравнений: $R = 2{,}64 кН$; $N = 9{,}35 кН$ ..

Определение реакций в шарнирах проведем методом расчленения. Выделим из системы тело AB и составим для него расчетную схему (рис.3), представив реакции в шарнирах составляющими $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_B, \overline{Y}_B$. Получена плоская произвольная система сил. Составим для нее уравнения равновесия:

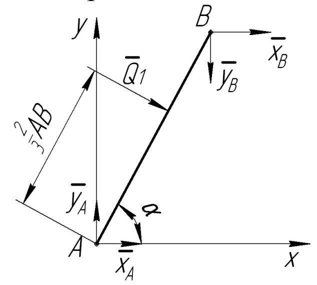

Рис.3. Расчетная схема

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad X_A + X_B - Q_1 \sin\alpha = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad Y_A - Q_1 \cos\alpha - Y_B = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_к) = 0; \qquad -Q_1 \frac{2}{3} AB - X_B AB \sin\alpha - Y_B AB \cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Система трех уравнений (1), (2) и (3) имеет четыре неизвестные. Выделим из системы тело BC и составим для него расчетную схему. При этом составляющие реакции в шарнире B равны по величине составляющим в том же шарнире для тела AB, но противоположны по направлению.

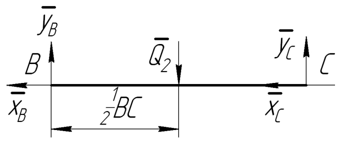

Рис.4. Расчетная схема

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad -X_B - X_C = 0; \qquad (4)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \qquad -Y_B - Q_2 + Y_C = 0; \qquad (5)$$

$$\sum m_в(\overline{F}_X) = 0; \qquad -Q_2 \frac{1}{2} BC + Y_C BC = 0. \qquad (6)$$

Система уравнений (4), (5), (6) имеет четыре неизвестные. Выделим из системы тело CD. Расчетная схема для него имеет вид (рис.5).

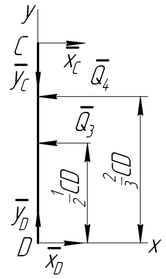

Рис.5. Расчетная схема

Имея в виду, что составляющие реакции шарнира C направлены в стороны, противоположные аналогичным составляющим для тела BC, составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad X_C + X_D - Q_3 - Q_4 = 0; \qquad (7)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \qquad Y_D - Y_C = 0; \qquad (8)$$

$$\sum m_C(\overline{F}_X) = 0; \qquad -Q_4 \frac{1}{3} CD - Q_3 \frac{1}{2} CD + X_D CD = 0. \qquad (9)$$

Система уравнений (7), (8), (9) имеет четыре неизвестные.

Выделим из системы тело AED. Расчетная схема для него примет вид (рис.6).

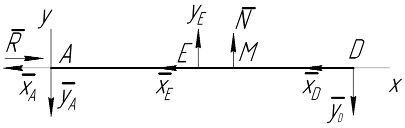

Рис.6. Расчетная схема

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{KX} = 0; \qquad R - X_A - X_E - X_D = 0; \qquad (10)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \qquad -Y_A - Y_E + N - Y_D = 0; \qquad (11)$$

$$\sum m_E(\overline{F}_X) = 0;$$

$$Y_A \cdot AB \cos\alpha + N(AM - AB\cos\alpha) - Y_D BC = 0. \qquad (12)$$

Решаем полученную систему уравнений (1)-(12): $Y_C = 3{,}75 кН$; $Y_B = -3{,}75 кН$; $X_B = -4{,}9 кН$; $X_A = 8{,}2 кН$; $Y_D = 3{,}75 кН$; $X_D = 2{,}71 кН$; $X_C == 3{,}23 кН$; $X_B = -3{,}23 кН$; $Y_A = 5{,}57 кН$; $X_E = 6{,}79 кН$; $Y_E = 0$. Таким образом, определены все составляющие реакции в шарнирах секции механизированной крепи.

С.В. Никулов
Научный руководитель – доцент, канд. техн. наук Н.А. Лазуткина
Муромский институт Владимирского государственного университета
602264 г. Муром, Владимирской обл., ул. Орловская, д. 23
e-mail:kaftexmex@yandex.ru

Применение принципа возможных перемещений и определение реакций секции механизированной крепи

Секция механизированной гидравлической крепи, состоящая из сочленения звеньев, находится под действием распределенной нагрузки и сосредоточенных сил. Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции опор конструкции с основанием секции. Данные для расчета взять из таблицы. Опору секции считать неразрывно связанной с почвой (рис.1).

Исходные данные: АВ=2,5м; ВС=3,0м; СД=2,2м; q_1=3 кн/м; q_2=2,5 кн/м; q_3=3,4 кн/м; q_4=2,0 кн/м. Заменим действие распределенных нагрузок сосредоточенными силами:

$Q_1 = 3{,}75кН;\ Q_2 = 7{,}5кН;\ Q_3 = 4{,}4кН;\ Q_4 = 1{,}54кН;\ \sin\alpha = 0{,}88;\ \cos\alpha = 0{,}485$.

В соответствии с этим расчетная схема секции крепи примет вид рисунка 1*а*.

Реакция опоры A представляет собой совокупность двух составляющих $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$. Для определения горизонтальной составляющей $\overline{X}_A$ цилиндрический шарнир A мысленно заменим ползуном, дающим возможность перемещения точки A в горизонтальном направлении. В этом случае, звено AB примет положение A_1B_1, переместившись поступательно на величину δS_A влево (рис.1*а*).

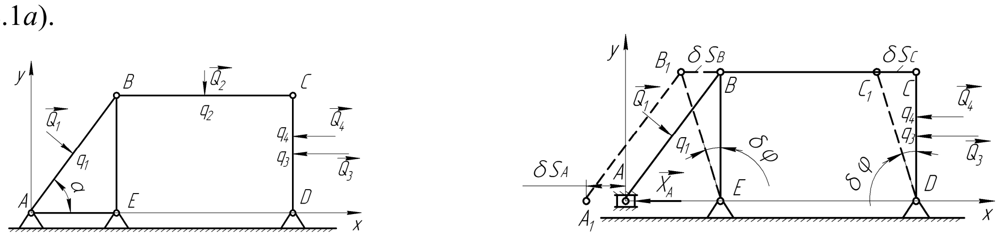

Рис.1 Расчетная схема

Звено BE займет положение B_1E_1, повернувшись на угол $\delta\varphi$ относительно точки E, звено DC - положение DC_1. Угол его поворота, очевидно, равен углу поворота BE. Вследствие полости угла поворота $\delta\varphi = \dfrac{\delta S}{BE}$ вертикальным перемещением звена BC можно пренебречь. Согласно вышесказанному запишем уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений:

$$x_A \cdot \delta S_A + Q_3 \cdot \frac{1}{2}\delta S_A + Q_4 \frac{2}{3}\delta S_A - Q_1 \delta S_A \sin\alpha = 0\,;\ x_A = Q_1 \sin\alpha - Q_3 \frac{1}{2} - Q_4 \frac{2}{3} = 0{,}4кН\,.$$

Для определения вертикальной составляющей $\overline{Y}_A$ заменим мысленно цилиндрический шарнир A ползуном, дающим возможность вертикального перемещения точки A (рис.2).

Придадим системе возможное перемещение δS_A под действием реакции $\overline{Y}_A$. Тогда звено будет находиться в плоском движении AB с мгновенным центром вращения в точке E и повернется на угол $\delta\varphi$, звенья BE и CD повернутся относительно соответственно шарниров E и D на одинаковый угол $\delta\varphi$,, а вертикальным перемещением звена BC можно пренебречь. Запишем уравнение работ: $Y_A \cdot \delta S_A - Q_1 \delta S_1 - Q_3 \dfrac{\delta S_e}{2} - Q_4 \dfrac{2}{3}\delta S_C = 0$. Выразим возможные перемещения точек приложения сил через δS_A. $\delta\varphi_1 = \dfrac{\delta S_A}{AE}$;

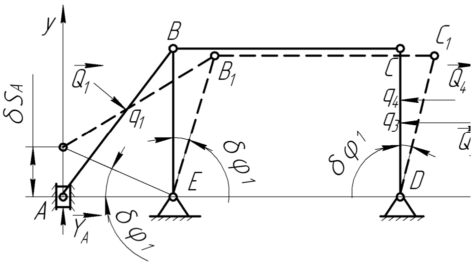

Рис.2.

Возможное перемещение точки q_5: $\delta S_1 = \delta\varphi_1 \cdot Eq$. Возможное перемещение точки C. $\delta S_C = \delta\varphi_I \cdot BE = \dfrac{\delta S_A}{AE} \cdot BE$. Реакция в шарнире E также может быть разложена на две составляющие $\overline{X}_E$, $\overline{Y}_E$. Произведем с шарниром E те же преобразования, что и для шарнира A.

Для расчетной схемы с горизонтальным ползуном (рис.3), которая предполагает поступательное перемещение звеньев AB, BE и BC влево на величину δS_E и поворот звена CD относительно шарнира D на угол $\delta\varphi_2$, получим следующее уравнение работ:

$$X_A\delta S_E + \frac{1}{2}Q_3\delta S_E + Q_4\frac{2}{3}\delta S_E - Q_1\delta S_E \sin\alpha + X_E\delta S_E = 0. \;\; X_E = 0\,.$$

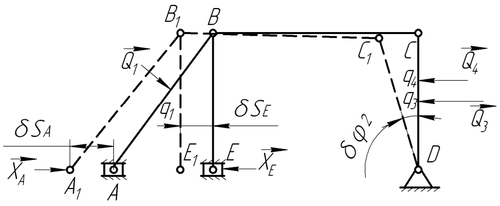

Рис.3.

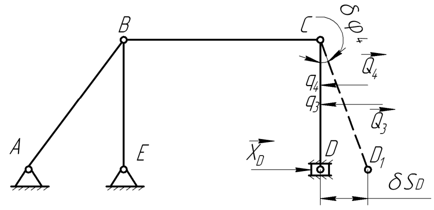

Рис.4

Для определения горизонтальной составляющей реакции в опоре D мысленно заменим шарнир горизонтальным ползуном (рис.5). Мгновенный центр вращения звена CD находится в точке C, следовательно, данная схема предполагает только движение одного звена системы: поворот звена CD вокруг точки C на угол $\delta\varphi_6$. Составим уравнение работ, придав системе возможное перемещение в точке C δS_D: $X_A\delta S_D - Q_3\dfrac{\delta S_A}{2} - Q_4\dfrac{2}{3}\delta S_D = 0;\;\; X_D = 3{,}25кН$.

Заменим мысленно шарнир в точке D на вертикальный ползун и придадим системе возможное перемещение δS_A в направлении составляющей реакции $\overline{Y}_D$ (рис.5).

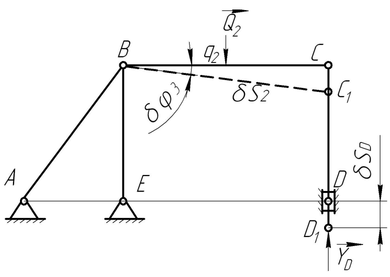

Рис.5.

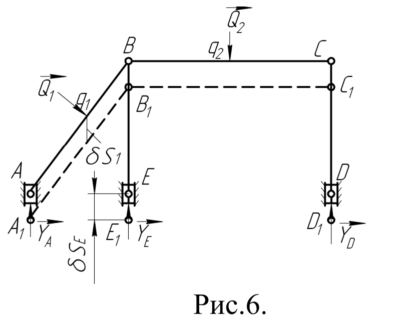

Рис.6.

В этом случае, звено BC повернется на угол $\delta\varphi_3$ относительно точки B, а звено CD опустится вертикально вниз на величину δS_D, причем будет соблюдено соотношение: $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta S_D}{BC}$. Запишем уравнение работ: $Y_D \cdot \delta S_D + Q_2\dfrac{\delta S_D}{2} = 0$; откуда: $Y_D = -\dfrac{Q_2}{2} = -3{,}75кН$. Реакция направлена в противоположную сторону. Для определения вертикальной составляющей реакции Y_E воспользуемся расчетной схемой, представленной на рис.6. Заменив шарниры A, D, E вертикальными ползунами и добавив соответственно реакции $\overline{Y}_A$, $\overline{Y}_E$ и $\overline{Y}_D$ придадим системе возможное перемещение в вертикальном направлении δS_E. В этом случае все звенья системы переместятся поступательно на эту величину. Уравнение работ будет иметь вид: $-Y_A \cdot \delta S_E - Y_D\delta S_E - Y_E\delta S_E + Q_1\cos\alpha \cdot \delta S_E + Q_2\delta S_E = 0$; $Y_E = -3{,}13кН$

Таким образом, определены все составляющие реакций в опорах A, D, E.